

Grundsätze der Modellierung von Messprozessen für die Auswertung¹

Wolfgang Kessel, Braunschweig

Zusammenfassung:

Mit dem GUM (bzw. GUIDE) [1] ist den Messtechnikern ein Verfahren in die Hand gegeben, die Güte ihrer Messergebnisse durch eine vereinheitlichte, quantitative Aussage zu beschreiben. Die DKD-Schrift DKD-3(EA-4/02) [2] hat die Vorgehensweise so weit formalisiert, dass sich der Messtechniker jetzt auf die eigentlichen Elemente der Beurteilung konzentrieren kann: die Aufstellung des Modells der Auswertung und die Vorbereitung der Eingangsdaten der Auswertung aus den jeweiligen Kenntnissen über den Messprozess. Der vorliegende Beitrag befasst sich mit dem ersten Problemkreis. Er stellt zunächst kurz die Grundsätze für eine Unsicherheitsanalyse nach GUM und die organisatorische Vorgehensweise bei der Durchführung zusammen. Darauf baut die nachfolgende Darstellung der Grundsätze der Modellierung von Messprozessen für die Auswertung auf, die an drei messtechnischen Beispielen erläutert werden: der Kalibrierung eines Spannungskalibrators, der Bestimmung des Wägewertes eines Gewichtsstückes und dem Aufbau einer äquidistanten Werteskala mit Hilfe eines Normal und eines Komparators.

Summary:

With the GUM (or GUIDE) [1], metrologists have been given a tool which makes it possible for them to describe the quality of their measurement results through a unified, quantitative statement. The DKD brochure DKD-3(EA-4/02) [2] has formalized the way of proceeding to such an extent that the metrologist can now concentrate on the actual elements of the assessment: formulation of the model for the evaluation and preparation of the input data for the evaluation on the basis of the information about the measurement process available to him. This contribution deals with the first problem area. It starts with a comprehensive summary of the principles of uncertainty analysis resulting from the rules of the GUM and organization procedure that has to be followed in practice. It then describes basic principles of modelling of measurement processes that may be applied to develop models of evaluation with respect to the uncertainty analysis. The use of these principles is demonstrated in three metrological examples: the calibration of voltage calibrator, the determination of the weight of a mass by a balance and the set-up of a scale of equidistant values deduced from a standard using a comparator.

¹ Vortrag, gehalten beim DAM - Workshop "Messunsicherheiten", 22.-24. Mai 2000, in Ilmenau.

1 Einleitung²

Im Jahre 1993 erschien der ISO/BIPM "Guide to the expression of uncertainty in measurement" [1], häufig kurz GUM oder GUIDE genannt. Damit wurde der Messunsicherheit in den Bereichen, die sich mit präziserer Messtechnik befassen, ein hoher Stellenwert für den Qualitätsnachweis eines Messergebnisses zugewiesen. Das gilt besonders für Kalibrierdienste, ist aber auch für den gesetzlich geregelten Bereich von gleichrangiger Bedeutung. Dort ist das Vertrauen für abgegebene oder verwendete Werte von besonderer Bedeutung. Dieses Vertrauen kann nur erlangt werden, wenn es gelingt, dem Anwender der Messwerte die messtechnische Kompetenz aufzuzeigen. Bei den heutigen komplexen, meist noch Rechner gestützten Messverfahren ist das eine nicht ganz einfache Aufgabe. Es wird auf Dauer nur gelingen, wenn die Methoden und Verfahren, die zu den angegebenen Werten führen, transparent gemacht werden. Dazu gehört ohne Zweifel die Transparenz der Messunsicherheitsanalyse. Sie ist ein wesentlicher, wenn nicht der wesentliche Bestandteil der Qualitätsbeurteilung von Messergebnissen. Die in der EA (European co-operation for Accreditation [2]) zusammengeschlossenen europäischen Kalibrierdienste haben, wie wohl allgemein bekannt ist, daher das Entstehen des GUM besonders unterstützt. Sie haben dann auch schnell durch die Herausgabe des 'requirement document' EA-4/02 (früher EAL-R2) "Expression of Uncertainty of Measurement in Calibration" [3] reagiert. Seine deutsche Übersetzung hat unter DKD-3 "Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen" eine weite Verbreitung gefunden. Dieses Dokument legt die grundsätzliche Verfahrensweise fest. Es gibt jedoch keine konkreten Handlungsanweisungen für die einzelne Messung. Es kann dies auch nicht, da die Messungen in den verschiedenen Bereichen sehr unterschiedliche Messprozesse überdecken. Darüberhinaus müssen im Einzelfall immer die Bedingungen beurteilt werden, unter denen Messungen in den betreffenden Fachgebieten durchgeführt werden. Dazu ist Expertenwissen notwendig. Entsprechende Ausführungsanweisungen müssen daher den einzelnen Fachgruppen vorbehalten bleiben.

Von der EA Task Force 'Measurement Uncertainty' wurden in enger Zusammenarbeit mit verschiedenen EA-Fachbereichen einzelne Beispiele erarbeitet, die verschiedene Rechenmethoden und Vorgehensweisen aufzeigen. Sie wurden bzw. werden als ergänzende 'guidance documents' EA-4/02-S1 (früher EAL-R2-S1, deutsch DKD-3-E1) [4] und EA-4/02-S2 (erscheint als deutsche Übersetzung DKD-3-E2 im Laufe der ersten Hälfte des Jahres 2000) [5] herausgegeben. Sie geben ausführliche Beispiele transparenter Unsicherheitsanalysen. Dabei wurden allgemeine Regeln erkannt und angewandt, die im folgenden kurz dargestellt werden. Sie zeigen, dass der rechnerische Ablauf soweit schematisiert werden kann, dass die eigentlichen Rechnungen nahezu routinemässig und damit automatisiert ausführbar sind. Dazu können geeignete eigene Rechnerprogramme (z.B. Standard-Spreadsheet-Programme) oder auch kommerziell erhältliche Spezialsoftware [6] eingesetzt werden. Ihr Einsatz kann nur

² Die hier gegebene Darstellung lehnt sich eng an einen Vortrag an, den der Autor 1999 bei dem 147. PTB-Seminar "Vorträge des 147. PTB-Seminars - Einsatz komplexer elektronischer Präzisionsmessgeräte in Kalibrierlaboratorien" gehalten hat [9].

nachdrücklich empfohlen werden, da sie i.a. eine standardisierte Protokollierung liefern. Sofern der Ablauf wohl durchdacht ist, führen sie zu einer guten Transparenz der Vorgehensweise. Darüber hinaus entlasten rechnergestützte Verfahren den die Unsicherheitsanalyse Durchführenden von den mechanischen, routinemäßigen Tätigkeiten. Sie geben ihm so stärker die Möglichkeiten, sich auf die Aufstellung des Modells der Auswertung und die Bereitstellung der Rohdaten, d.h. auf die eigentliche Basis der Beurteilung seiner Messung, zu konzentrieren. Es ist nicht das Ziel dieses Beitrages, zu diesen mehr mechanischen Tätigkeiten eine Hilfestellung zu geben. Es ist vielmehr Ziel die Grundsätze der Modellbildung für die Auswertung darzustellen, wobei die zentrale Stellung des Messprozesses herausgestellt wird.

2 Die Regeln der Unsicherheitsanalyse nach GUM

Mit der internationalen Einführung des GUM und den darauf aufbauenden Dokumenten der verschiedenen messtechnischen Organisationen wurde die Ansicht aufgegeben, dass die Güte einer Messung durch ein Intervall angegeben werden könnte, in dem sich der sog. „wahre Wert“ der Messgröße mit Sicherheit befände. Der GUM gründet sich vielmehr auf dem operativen Standpunkt, die von den meisten metrologischen Staatsinstituten schon seit langem vertreten wurde, dass zwar in jeder Messung eine Messgröße vorhanden ist, d.h. eine im physikalischen Sinne messbare Größe, dass ihr aber ihr Wert erst durch die Messung zugewiesen wird, d.h. nicht in der Messung entdeckt werden muss, sondern erst bei der Messung entsteht.. Da diese Zuweisung in jedem Einzelfall nur unter der mehr oder weniger beschränkten Kenntnis des Messprozesse und seiner Bedingungen gemacht werden kann, ist diese i. Allg. nicht eindeutig. Das Internationale Wörterbuch der Metrologie (Vocabulaire International de Métrologie, VIM) definiert daher Messunsicherheit sinngemäß (nach VIM 3.9, GUM 2.2.3, DIN 1319-T1 3.6 [7][1][8]) als

Kennwert, der dem Messergebnis beigeordnet ist und den Bereich der Werte charakterisiert, die der Messgröße (aufgrund der über die Messung vorhandenen Kenntnisse) vernünftigerweise zugeordnet werden können.

Es ist somit das Ziel der Unsicherheitsanalyse aus den nicht-vollständigen Kenntnissen über die Messung eine Aussage über die Werte zu gewinnen, die mit der unvollständigen Kenntnis verträglich sind. Der Weg gründet sich auf zwei Säulen:

- den Kenntnissen über den Messprozess,
d.h. einer Beschreibung der im jeweiligen Messprozess wirksamen messtechnischen Zusammenhänge in Form eines (mathematischen) Modells der Auswertung
(2.1)
$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$
das die Messgröße Y in Beziehung setzt zu den Größen X_1, X_2, \dots, X_N , die den zu zuweisenden Messwert beeinflussen.
- den Kenntnissen über die Daten,
d.h. eine Beschreibung der mit den unvollständigen Kenntnissen über der Einflußgrößen verträglichen Werte durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Die Verteilungen, die zur Darstellung der Kenntnisse über die Eingangsdaten in der Auswertung benötigt werden, sind relativ einfach. Meist liegt einer der folgenden vier Fälle vor:

- 1) Man weiss, dass der Wert der Größe X irgendwo zwischen einer unteren Grenze a_- und einer oberen Grenze a_+ , sonst nichts. Es resultiert eine rechteckförmige Verteilung

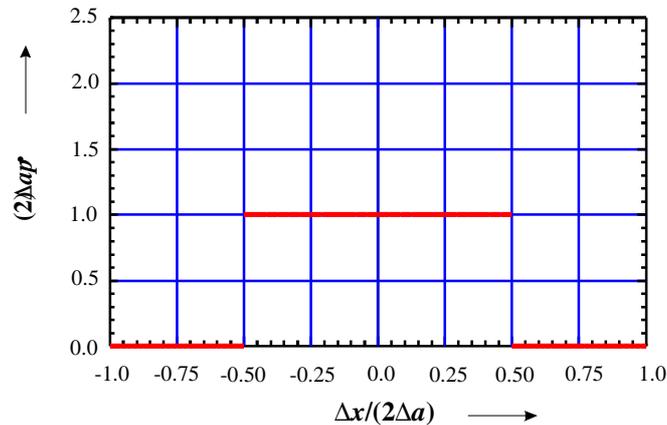


Fig. 2.1 Rechteckförmige Verteilung der Halbweite Da für die Abweichungen vom Erwartungswert der Größe X

der Halbweite

$$(2.2) \quad Da = a_+ - a_-$$

mit dem Erwartungswert

$$(2.3) \quad E[X] = \frac{a_+ + a_-}{2}$$

und der Varianz

$$(2.4) \quad \text{Var}[X] = \frac{(Da)^2}{3}$$

- 2) Man weiss, dass die Größe X die Summe oder Differenz zwei anderer Größen X_1 und X_2 ist

$$(2.5) \quad X = X_1 \pm X_2,$$

über die man nur die Kenntnis hat, dass ihre Werte rechteckförmig mit der gleichen Halbweite

$$(2.6) \quad Da_1 = Da_2 = Da'$$

verteilt sind. Es resultiert dann eine dreieckförmige Verteilung

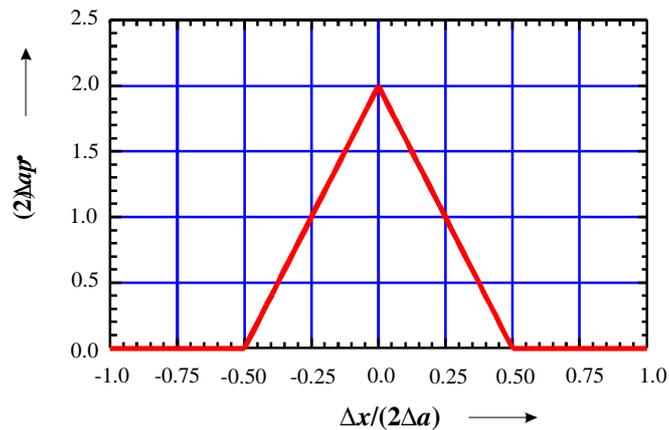


Fig. 2.2 Dreieckförmige Verteilung der Halbweite Da für die Abweichungen vom Erwartungswert der Größe X

der Halbweite (Summe der Halbweiten der beiden rechteckförmigen Verteilungen)

$$(2.7) \quad Da = Da_1 + Da_2 = 2Da'$$

mit dem Erwartungswert

$$(2.8) \quad E[X] = E[X_1] \pm E[X_2]$$

und der Varianz

$$(2.9) \quad \text{Var}[X] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] = \frac{(Da)^2}{6}$$

- 3) Man weiss, dass die Größe X die Summe oder Differenz zwei anderer Größen X_1 und X_2 ist

$$(2.10) \quad X = X_1 \pm X_2,$$

über die man nur die Kenntnis hat, dass ihre Werte rechteckförmig jedoch mit unterschiedlichen Halbweiten Da_1 und Da_2 verteilt sind. Es resultiert dann eine trapezförmige Verteilung

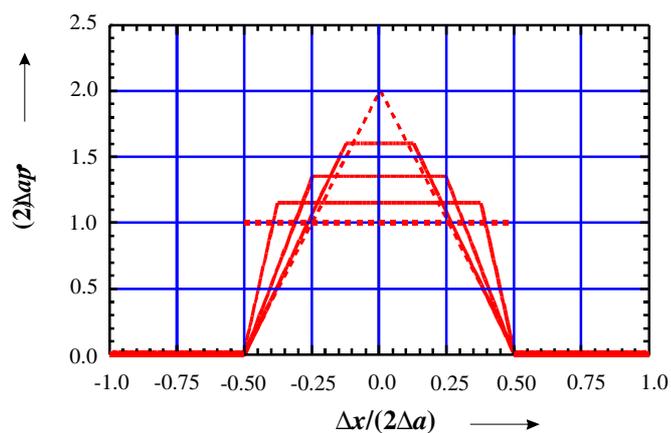


Fig. 2.3 Trapezförmige Verteilungen der Halbweite Da der Abweichungen vom Erwartungswert der Größe X für unterschiedliche Werte des Eckenparameters b .

mit einer Halbweite

$$(2.11) \quad Da = Da_1 + Da_2,$$

die die Summe der Halbweiten der beiden rechteckförmigen Verteilungen ist, und einem Eckenparameter

$$(2.12) \quad b = \frac{|Da_1 - Da_2|}{Da_1 + Da_2},$$

der gleich dem auf die Halbweite bezogenen Unterschied der Halbweiten der beiden rechteckförmigen Verteilungen ist. Sie besitzt wieder den Erwartungswert

$$(2.13) \quad E[X] = E[X_1] \pm E[X_2]$$

und jedoch die Varianz

$$(2.14) \quad \text{Var}[X] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] = \frac{(Da)^2}{6} (1 + b^2)$$

4) Man weiss, dass die Größe X vom Sinus der Phase j abhängt

$$(2.15) \quad X = Da \cdot \sin(j),$$

über die man nur die Kenntnis hat, dass ihre Werte rechteckförmig in $-p \dots +p$ verteilt sind. Es resultiert dann eine U-förmige Verteilung

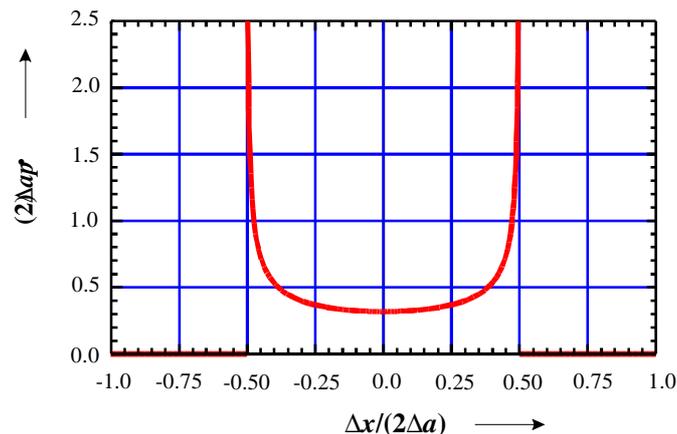


Fig. 2.4 U-förmige Verteilung der Halbweite Da für die Abweichungen vom Erwartungswert der Größe X

der Halbweite mit dem Erwartungswert

$$(2.16) \quad E[X] = 0$$

und der Varianz

$$(2.17) \quad \text{Var}[X] = \frac{(Da)^2}{2}$$

5) Man kennt von der Größe X den Messwert x und die ihm beigeordnete Standardmessunsicherheit $u(x)$. Es resultiert eine glockenförmige Normalverteilung mit dem Erwartungswert

$$(2.18) \quad E[X] = x$$

und

der

Varianz

$$(2.19) \quad \mathbf{Var}[X] = u^2(x)$$

Dieser Fall tritt speziell bei der Auswertung von wiederholten Beobachtungen einer Größe, z.B. Anzeige, nach statistischen Methoden auf, wo als Erwartungswert der arithmetische Mittelwert und als Standardmessunsicherheit die empirische Standardabweichung des Mittelwertes betrachtet wird (Ermittlungsmethode A).

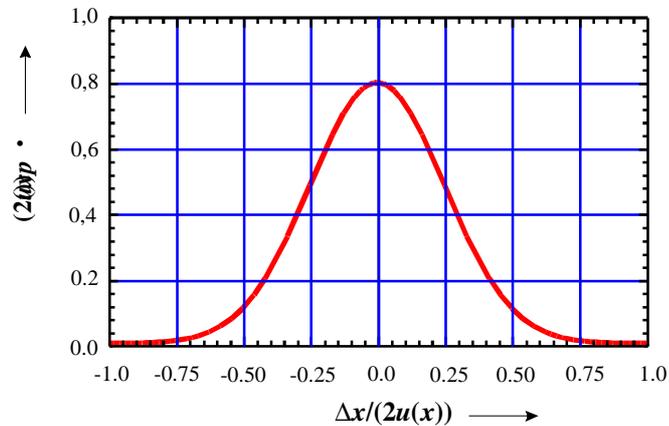


Fig. 2.5 glockenförmige Normalverteilung der Standardabweichung $u(x)$ für die Abweichungen vom Erwartungswert der Größe X

Die Verbindung zwischen den für die Messung relevanten Daten und dem der Messgröße zuzuordnenden Messwert wird durch das Modell der Auswertung hergestellt. Dabei werden die Erwartungswerte der gewonnenen Verteilungen der Eingangswerte als die besten Schätzwerte der Einflußgrößen (Eingangswerte der Auswertung) angesehen

$$(2.20) \quad x_1 = \mathbf{E}[X_1], x_2 = \mathbf{E}[X_2], \dots, x_N = \mathbf{E}[X_N]$$

aus denen sich der gesuchte Messwert (Ergebnisgröße der Auswertung) durch Einsetzen in die Modellfunktion Gl(2.1) direkt ergibt

$$(2.21) \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Die den Eingangswerten beizuordnenden Standardmessunsicherheit sind die Quadratwurzel aus den Varianzen der Verteilungen

$$(2.22) \quad u(x_1) = \sqrt{\mathbf{Var}[X_1]}, u(x_2) = \sqrt{\mathbf{Var}[X_2]}, \dots, u(x_N) = \sqrt{\mathbf{Var}[X_N]}$$

Aus denen sich die Standardmessunsicherheit, die dem Messwert beizuordnen ist in zwei Schritten ergibt. Zunächst sind die von den einzelnen Einflußgrößen herrührenden Unsicherheitsbeiträge

$$(2.23) \quad u_1(y) = c_1 u(x_1), u_2(y) = c_2 u(x_2), \dots, u_N(y) = c_N u(x_N)$$

mit Hilfe der aus der Modellfunktion abzuleitenden Sensitivitätskoeffizienten

$$(2.24) \quad c_1 = \frac{\mathcal{V}f}{\mathcal{V}X_1} \Big|_{\underline{x}=\underline{x}}, c_2 = \frac{\mathcal{V}f}{\mathcal{V}X_2} \Big|_{\underline{x}=\underline{x}}, \dots, c_N = \frac{\mathcal{V}f}{\mathcal{V}X_N} \Big|_{\underline{x}=\underline{x}}$$

zu berechnen. Anschließend ergibt sich die gesuchten Standardmessunsicherheit als Quadratwurzel aus einer quadratische Summe über alle Unsicherheitsbeiträge

$$(2.25) \quad u(y) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^N \dot{\mathbf{a}} u_i(y) r(x_i, x_j) u_j(y)},$$

in der noch die Korrelationskoeffizienten der Eingangsgrößen auftreten.

In dem i.Allg. vorliegenden Fall das die Eingangsgrößen als nicht-korreliert angesehen werden können, besitzen die Korrelationskoeffizienten die Werte

$$(2.26) \quad r(x_i, x_j) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i \neq j \\ 1, & \text{wenn } i = j \end{cases}$$

Die Gleichung Gl(2.19) geht dann in die bekannte, meist benutzte Gleichung

$$(2.27) \quad u(y) = \sqrt{u_1^2(y) + u_2^2(y) + \dots + u_N^2(y)}$$

über, d.h. die dem Messergebnis beizuordnende Standardmessunsicherheit ergibt in diesem Fall als die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate aller Unsicherheitsbeiträge.

3 Organisatorischer Aufbau einer Unsicherheitsanalyse

Das im vorangehenden Abschnitt beschriebenen Regeln des GUM führen auf ein Verfahren das auf der Einschätzung der Kenntnisse der Einflußgrößen der Messung und der Anwendung der Gleichungen Gl(2.) und Gl(2.) beruht. Daraus resultiert ein grundsätzlicher Aufbau jeder Unsicherheitsanalyse, der in der Norm DIN 1319 [5] (Teil 3, Abschnitt 4.2) angegeben ist, und sinngemäß etwa folgendermaßen lautet:

Bei jeder Unsicherheitsanalyse sind zweckmäßigerweise vier deutlich zu trennende Schritte nacheinander auszuführen:

- a) **Aufstellen eines Modells der Auswertung**, das die Beziehung der interessierenden Messgröße, der Ergebnisgröße der Auswertung, zu den übrigen an der Messung beteiligten Größen, Eingangsgrößen der Auswertung, mathematisch beschreibt;
- b) **Vorbereitung der gegebenen Messwerte und anderer verfügbarer Daten** aus den jeweiligen Kenntnissen über die Messung und ihren Bedingungen;
- c) **Berechnung des Messergebnisses und der ihm beizuordnenden Messunsicherheit** aus den vorbereiteten Daten mittels des Modells

- d) **Angabe des vollständigen Messergebnisses** für die Messgröße bestehend aus Messwert und beigeordneter Messunsicherheit.

Die Diskussionen um die genannten EA-Beispielsammlungen haben gezeigt, dass es für die Durchführung der Unsicherheitsanalyse sinnvoll ist, diese Punkte durch eine weitergehende Unterteilung näher zu spezifizieren.

a) **Aufstellung eines Modells der Auswertung:**

- Titel, der die Kalibrierung kurz und treffend kennzeichnet;
- kurze Beschreibung des Messverfahrens, unter besonderer Berücksichtigung des Messprinzips und der Durchführung der Messung;
- Modell der Auswertung als mathematische Beziehung, mit deren Hilfe der Wert der Messgröße aus den Werten der übrigen an der Messung beteiligten Größen bestimmt werden soll. Hierbei ist zu beachten, dass ein Modell u.U. auch aus mehreren Gleichungen bestehen kann, die Teilmodelle beschreiben. Diese Darstellungsform bietet sich besonders bei umfangreichen Modellen an, da sie dort eine bessere Übersichtlichkeit liefert. Ein Modell kann auch aus einem Rechenalgorithmus oder einer als beschreibender Text verfassten Handlungsanweisung bestehen. Wesentlich ist in jedem Falle, dass das Modell der Auswertung die Beziehung zwischen der Ergebnisgröße und den Eingangsgrößen der Auswertung beschreibt, mittels der in eindeutiger Weise Werte der Ergebnisgröße aus Werten der Eingangsgrößen berechnet werden können;
- Liste der im Modell der Auswertung verwendeten Symbole bzw. Größen mit einer kurzen Definition oder Erklärung ihrer Bedeutung.

b) **Vorbereitung der gegebenen Messwerte und anderer für die Auswertung benötigter Daten:**

Darstellung der Kenntnisse über die Eingangsgröße der Auswertung, wie

- Angabe der Quellen (Kalibrierschein, Herstellerzertifikat u.ä.) aus denen die Werte entnommen wurden;
- Einschätzungen der Variationsbereiche von nicht bekannten Abweichungen;
- Tabelle der beobachteten Werte und gegebenenfalls andere Angaben;
- Angabe der daraus ermittelten Standardmessunsicherheiten.

Hier hat sich die Listenform als besonders zweckmäßig erwiesen, da sie den unterschiedlichsten Anforderungen und messtechnischen Situationen angepasst werden kann. Dabei sollte jeder Größe, die im Modell der Auswertung auftritt ein getrennter Abschnitt gewidmet sein. Bei den Auswertungen nach der Ermittlungsmethode A sollte neben der Liste der beobachteten Werte auch die statistische Auswertung

- arithmetischer Mittelwert,
 - empirische Standardabweichung der Einzelbeobachtung,
 - und empirische Standardabweichung des arithmetischen Mittelwertes
- angeben werden.

c) **Berechnung des Messergebnisses und der ihm beizuordnenden Standard-Messunsicherheit aus den vorbereiteten Daten:**

Dieser Teil, der als das Messunsicherheitsbudget im engeren Sinne angesehen wird, kann vorteilhaft in tabellarischer Form ausgeführt werden. Dabei empfiehlt es sich, die schon in der EA-04/2 (DKD-3) angegebene Tabelle auf die folgenden Spalten zu erweitern

- Größe,
- Wert,
- beigeordnete Standardmessunsicherheit,
- effektiver Freiheitsgrad,
- Verteilungsform
- Sensitivitätskoeffizient,
- Unsicherheitsbeitrag.

d) **Angabe des vollständigen Messergebnisses:**

Angabe der für die Definition der Messgröße wesentlichen Messbedingungen und des Messergebnisses zusammen mit der beigeordneten erweiterten Messunsicherheit und dem zu ihrer Bestimmung benutzten Erweiterungsfaktor, etwa in der Form

Messergebnis \pm erweiterte Messunsicherheit

(k = gewählter Erweiterungsfaktor)

Hierbei erfolgt die Berechnung der erweiterten Messunsicherheit als Halbweite eines Werteintervalls, das den (hohen) Bruchteil von 0,95 der Werte überdeckt, die unter den Bedingungen der Messung der Messgröße vernünftigerweise zugeordnet werden können.

Es versteht sich von selbst, dass die vorstehenden Anweisungen nur für ein ausführliches Messunsicherheitsprotokoll gelten. Diese ausführliche Protokoll muss nicht bei jeder Messung angelegt werden. Es gehört zur Beschreibung des jeweils durchgeführten Messverfahrens. Es müsste sich im Qualitätssicherungshandbuch oder einem anderen Schriftstück befinden, mit dem die Transparenz des Messverfahrens für Kalibrierungen dokumentiert wird.

Die bei den Punkten c) und d) der obigen Handlungsanweisung durchzuführenden Berechnungsschritte ergeben sich zwangsläufig aus der Methode des GUM. Sie sind damit leicht in ein Rechnerprogramm zu übersetzen. Das gilt auch für den Teil des Punktes b), der die Bestimmung des Wertes und der ihm beizuordnenden Standardmessunsicherheit für die verschiedenen Eingangsgrößen der Auswertung betrifft. Sobald über die Verteilung der Werte und ihrer Parameter entschieden wurde, ist die Vorgehensweise festgelegt. Durch die Umsetzung in ein Rechnerprogramm werden 'human resources' freigesetzt. Sie können konzentriert auf jene Teilen der Unsicherheitsanalyse ausgerichtet werden, für die z.Z. noch keine sinnvolle Rechnerunterstützung bekannt ist: die *Aufstellung des Modells der Auswertung* und die *Vorbereitung der Daten*, insbesondere der Einschätzung der Kenntnisse. Da hier das Wissen der Fachexperten besonders gefragt ist, scheint eine solche Unterstützung auch in naher Zukunft nicht realisierbar.

Die Einschätzung der Messbedingungen ist eng mit dem jeweiligen Messprozess verknüpft. Da sie empfindlich in die Vorbereitung der Daten eingeht, kann sie auch nur von dem jeweiligen Fachexperten aufgrund seiner metrologischen Erfahrung vorgenommen werden. Hier kann, neben den bekannten Checklisten, kaum eine allgemeine Unterstützung gegeben werden. Das ist bei der Aufstellung des Modells der Auswertung anders. Zwar ist jede Messung und damit auch jedes Modell der Auswertung anders, es gibt jedoch typische Teilaufgaben, die in den verschiedenen Messverfahren immer wieder auftreten. Sie sind daher in den betreffenden Modellen auch in ähnlicher Weise zu implementieren. Dies wird später aus den Beispielen in den Abschnitten 5 bis 6 deutlich werden.

4 Grundsätze der Modellierung von Messprozessen

Die Einschätzung der Daten kann an Hand der in Abschnitt 2 zusammengestellten Verteilungen leicht erfolgen. Ebenso liefert das GUM ein klar umschriebenes Verfahren zur Ermittlung des Messergebnisses und der ihm beizuordnenden Standardmessunsicherheit aus den Kenntnissen über die Einflußgrößen sobald das Modell der Auswertung aufgestellt ist. Zwar mag die Durchführung in manchen Einzelfällen ziemlich komplex und unübersichtlich sein, sie ist aber aus den Daten mit Hilfe des Modells der Auswertung rein mechanisch durchführbar und kann nach entsprechendem Programmieraufwand geeigneten Maschinen überlassen werden.

Die verbleibenden Aufgabe für den Messtechniker ist die Aufstellung des Modells der Auswertung. Es muss neben den physikalischen Zusammenhängen, die dem Messprozess und der Auswertung zugrunde liegen, irgendwie auch den Prozessablauf selbst beschreiben und seine Einflüsse berücksichtigen. Ein Ausgangspunkt hierfür ist die Beschreibung des in der Messung realisierten Ursache-Wirkung-Zusammenhang, durch den die Anzeigen an den Messgeräten des Messsystems bewirkt werden. Dabei sind zwei Typen von angezeigten Werten zu unterscheiden:

- angezeigte Werte, die mehr oder weniger direkt zum Messwert beitragen, und
- angezeigte Werte, die die festgelegten Bedingungen des Messprozesses charakterisieren und mehr als die Messung beeinflussende Parameter anzusehen sind.

Der erste Typ sind die Anzeigen im eigentlichen Sinne.

Der Messprozess selbst besteht i. Allg. darin, dass auf das Messsystem bestimmte Quellen einwirken, die gewisse Anzeigen hervorrufen. In der Auswertung wird dann von den Anzeigen und den bekannten Werten der Messparameter auf den Wert der Messgröße zurück geschlossen. Im einfachsten Fall der direkten Messung ist die Messgröße selbst eine und zwar die einzige Quelle, welche die Anzeige bewirkt. Das muß aber nicht so sein. So wird bei der Kalibrierung eines anzeigenden Mesgerätes durch Vergleich mit einem anzeigenden Normalmessgerät eine zusätzliche Quelle benötigt, die die beiden Messgeräte mit der gleichen Größe versorgt, so dass sich am zu kalibrierenden Messgerät oder am Normalmessgerät die gewünschte Anzeige einstellt. In diesem Fall wird die Quelle benötigt um

den gewünschten Zusammenhang der Anzeigen der beiden Messgeräte herzustellen. Der Ursache-Wirkung-Zusammenhang beschreibt nun, ohne auf die Werte im einzelnen einzugehen, wie die Quellen die Anzeigen an den verschiedenen Messgeräten des Systems bewirken. Er liefert damit einen quantitativen Zusammenhang zwischen den Quellen als Ursachen und den Anzeigen als Wirkungen, die man häufig auch als Antwort (Response) des Systems auf die Störung durch die Quellen bezeichnet.

Dieser Ursache-Wirkung-Zusammenhang wird meist in Form von sogenannten Antwort- oder Responsefunktionen beschrieben, die ausdrücken, wie sich die angezeigten Werte aus den Werten der Quellen unter den gegebenen Messbedingungen (Messparameter) ergeben. Ist die Responsefunktion oder sind die Responsefunktionen bekannt, so ergibt das Modell der Auswertung für den betreffenden Messprozess, indem das System der Responsegleichungen nach der Messgröße geeignet aufgelöst wird.

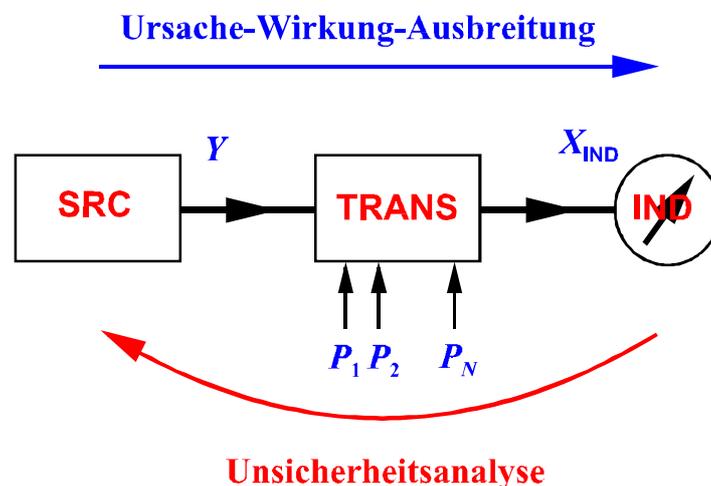


Fig. 4.1 Allgemeine Darstellung des Ursache-Wirkung-Zusammenhangs für die direkte Messung.

Fig. 4.1 zeigt zur Erläuterung den Ursache-Wirkung-Zusammenhang im Falle der direkten Messung. Die dem Wert nach unbekannte Messgröße Y wird durch das Messobjekt, hier als Quelle SRC, bezeichnet bereitgestellt und über ein Transmissionsglied TRANS an die Anzeige IND übergeben. Dort stellt sich die Anzeige X_{IND} ein. Die Übertragung wird durch die Parameter P_1, P_2, \dots, P_N beeinflusst, deren Werte auf vorgegebenen Niveau weitgehend konstant gehalten werden. Die physikalische Analyse der bei dem Größentransport von der Quelle zur Anzeige involvierten Vorgänge liefert die Response-Funktion

$$(4.1) \quad X_{\text{IND}} = h(Y, P_1, P_2, \dots, P_N).$$

Sie repräsentiert die Ursache-Wirkung-Beziehung als mathematischen Ausdruck des Ursache-Wirkung-Zusammenhangs der direkten Messung. Diese Beziehung wird in Fig. 4.1 durch den oberen Pfeil der Ursache-Wirkung-Ausbreitung symbolisiert. Sie muss, zumindest in einem gewissen Bereich der Parameterwerte, den für die Messung relevanten Parameterbereich

überdeckt, eindeutig nach der Messgröße auflösbar sein. Nur so ist der Rückschluß von der beobachteten Anzeige bei bekannten Parameterwerten auf den Wert der Messgröße möglich. Auflösen der Gleichung Gl(4.1) nach der Messgröße liefert das gesuchte Modell der Auswertung

$$(4.2) \quad Y = f(X_{\text{IND}}, P_1, P_2, \dots, P_N) = h^{-1}(X_{\text{IND}}, P_1, P_2, \dots, P_N).$$

h^{-1} ist die Umkehrung der Ursache-Wirkung-Beziehung. Sie wird in Fig. 4.1 durch den unteren von der Anzeige zur Messgröße gerichteten Pfeil der Unsicherheitsanalyse symbolisiert.

Dass die Aufstellung des Modells nicht in jedem Falle so einfach sein muss wie bei der direkten Messung und dass auch die Messgröße nicht immer die Ursache für die bewirkte Anzeige ist, zeigt der in Fig. 4.2 dargestellte Ursache-Wirkung-Zusammenhang bei der Kalibrierung eines Messgerätes mit einem Normalmessgerät [9]. Hier werden die beiden Messgeräte mit der gleichen Größe versorgt, die von einem ausreichend stabilen, aber sonst beliebigen Messwertgenerator erzeugt wird.

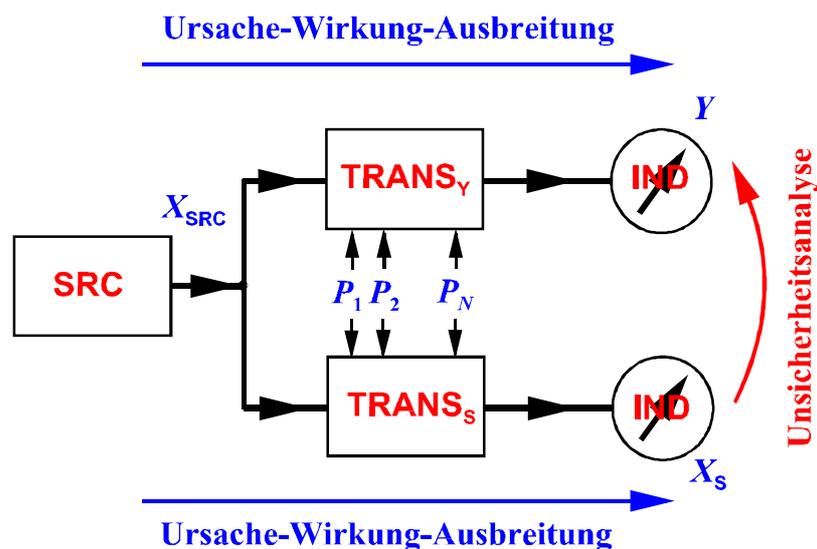


Fig. 4.2 Allgemeine (vereinfachte) Darstellung des Ursache-Wirkung-Zusammenhanges für die Kalibrierung eines Messgerätes mit einem Normalmessgerät [9].

Es ergeben sich so zwei Zweige, der Messzweig und der Bezugzweig, für die die Ursache-Wirkung-Beziehungen aufgestellt werden müssen

$$(4.3) \quad Y = h_Y(X_{\text{SRC}}, P_1, P_2, \dots, P_N)$$

und

$$(4.4) \quad X_S = h_S(X_{\text{SRC}}, P_1, P_2, \dots, P_N).$$

Das verbindende Glied zwischen den Zweigen ist die gemeinsame Speisung durch die von der Quelle simultan an beide Zweige gelieferte Versorgungsgröße X_{SRC} . Durch Auflösen der Gleichung Gl(4.4) für den Bezugszweig nach dieser Versorgungsgröße - das muss aus den gleichen Gründen wie bei der direkten Messung möglich sein -

$$(4.5) \quad X_{\text{SRC}} = h_{\text{S}}^{-1}(X_{\text{S}}, P_1, P_2, \dots, P_N)$$

und Einsetzen in die Gleichung Gl(4.3) ergibt sich das gesuchte Modell der Auswertung in der Form

$$(4.6) \quad Y = f(X_{\text{S}}, P_1, P_2, \dots, P_N) = h_{\text{Y}}(h_{\text{S}}^{-1}(X_{\text{S}}, P_1, P_2, \dots, P_N), P_1, P_2, \dots, P_N).$$

Der Pfeil der Unsicherheitsanalyse deutet an, dass diesmal nicht von rechts nach links, d.h. von der Anzeige auf die Quelle, sondern von unten nach oben, also vom Bezugsnormal auf das zu kalibrierende Messgerät zurückgeschlossen wird.

Wie sich aus dem hier dargestellte Prinzip in konkreten Messsituationen das der Unsicherheitsanalyse zugrunde zulegende Modell der Auswertung ergibt, wird in den folgenden drei Beispielen genauer erläutert.

5 Kalibrierung einer 10 V-Spannungsquelle durch Vergleich mit einem Spannungskalibrator bei der Nennspannungseinstellung 10 V

Die Messaufgabe besteht in diesem Fall darin den Wert der Spannung zu bestimmen, der von einem Spannungskalibrator³ bei der Einstellung 10 V abgegeben wird. Als Messmethode soll ein Vergleichsverfahren benutzt werden, durch das die abgegebene Spannung auf die Spannung eines Bezugsnormal zurückgeführt wird. Als Bezugsnormal dient ebenfalls ein Kalibrator, der zuvor bei verschiedenen Spannungseinstellungen kalibriert wurde, die im Kalibrierschein angegeben sind.

Das Messverfahren besteht in der Bestimmung der (kleinen) Spannungsdifferenz zwischen den vom Messobjekt (zu kalibrierender Kalibrator) und dem Bezugsnormal (kalibrierter Kalibrator) abgegebenen Spannung mit einem NULL-Detektor. Den dabei verwendeten Messaufbau zeigt das Schaltbild in Fig. 1.

³ Vom messtechnischen Standpunkt stellt ein Kalibrator eine äußerst stabile Quelle für eine bestimmte Größenkategorie dar, dass einen oder mehrere rückgeführte Werte bereitstellen soll bzw. nach Kalibrierung auch bereitstellt. Im messtechnischen Gebrauch ist daher ein Kalibrator eine äußerst stabile Quelle für einen oder mehrere richtige Werte einer bestimmten Größenkategorie.

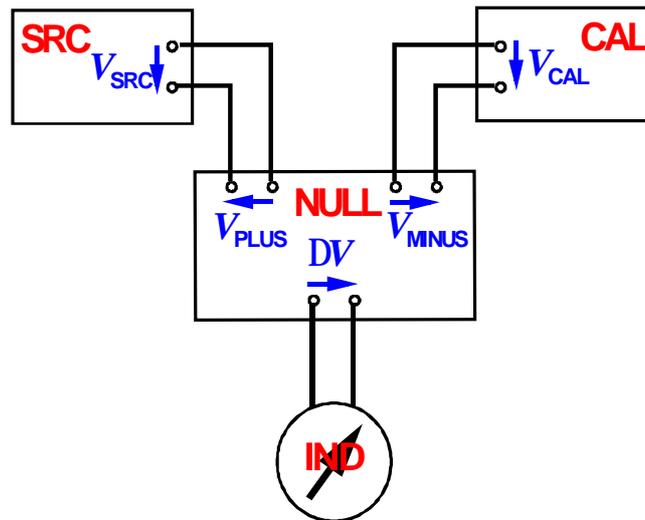


Fig. 5.1 Schaltbild des Messaufbaues für die Kalibrierung einer Spannungsquelle durch Vergleich mit einem Kalibrator

- SRC** - Spannungsquelle, deren Spannung bestimmt werden soll,
- CAL** - Kalibrator, dessen bereitgestellte Spannung bekannt ist.
- NULL** - NULL-Detektor, mit dem der Spannungsunterschied bestimmt wird (die getrennt gezeichnete Anzeige ist als zum Gerät gehörig anzusehen).
- IND** Anzeige des NULL-Detektors

Die zu kalibrierende Spannungsquelle SRC liefert die Spannung V_{SRC} . Sie wird dem PLUS-Eingang des NULL-Detektors zugeführt. Am MINUS-Eingang des NULL-Detektor liegt die Spannung V_{CAL} des Kalibrators CAL.

Das Schaltbild bildet die Grundlage des Messaufbaues. Als Grundlage der Unsicherheitsanalyse ist es jedoch weniger geeignet. Hier ist es sinnvoller, ein sog. Ursache-Wirkung-Diagramm zu verwenden, das die an der Messung beteiligten Größen nur schematisch darstellt, zusätzlich jedoch die während der Messung ablaufenden Vorgänge symbolisiert. Das Ursache-Wirkung-Diagramm zum Schaltbild aus Fig. 1 zeigt Fig. 2.

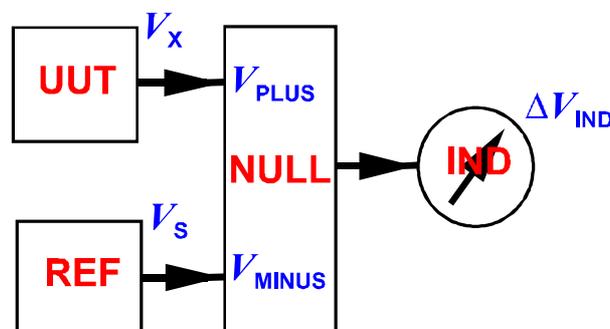


Fig. 5.2 Ursache-Wirkung-Diagramm für die Kalibrierung einer

Spannungsquelle durch Vergleich mit einem Bezugsnormal.

- UUT** - Spannungsquelle (unit under test), deren Spannung bestimmt werden soll,
REF - Bezugsnormal,
NULL - NULL-Detektor, mit dem der Spannungsunterschied bestimmt wird.
IND Anzeige des NULL-Detektors

Hier sind einige Änderungen in den Bezeichnungen durchgeführt, um die Allgemeingültigkeit der Vorgehensweise klarer werden zu lassen. Die von der zu kalibrierenden Spannungsquelle UUT (unit under test) gelieferte Spannung V_X ist die zu bestimmende Größe (Messgröße). Die Vergleichsgröße ist die vom Bezugsnormal REF gelieferte Spannung V_S . Messgröße und Vergleichsgröße werden zusammen dem NULL-Detektor zu geführt. Dadurch steht am Ausgang des NULL-Detektors die Differenz der beiden Spannungen zur Verfügung. Sie wird durch die Anzeige in einen als Zahlenwert ablesbaren Wert DV_{IND} (IND bedeutet Anzeige) oder eine andere digitale Information umgesetzt. Sie steht so zur Weiterverarbeitung zur Verfügung.

Das Ursache-Wirkung-Diagramm Fig. 2 beschreibt wie die Wirkung 'Anzeige' DV_{IND} durch die Übertragungseigenschaften NULL-Detektor aus den Ursachen 'Messgröße' V_X und 'Vergleichsgröße' V_S entsteht. Es ist eine kompakte schematische Beschreibung des Messvorganges und der wirkenden Zusammenhänge. Mit seiner Hilfe können auf einfache und übersichtliche Weise die für die Auswertung der Messung benötigten Gleichungen abgeleitet werden.

- Der vom NULL-Detektor angezeigte Spannungsunterschied ist gegeben durch die Differenz der an seinen beiden Eingängen liegenden Spannungen und einer möglichen, unbekanntem Abweichung dV_{NULL} . Die Abweichung hat ihre Ursache in den noch näher zu spezifizierenden Eigenschaften des realen NULL-Detektors.

$$(5.1) \quad DV_{IND} = V_{PLUS} - V_{MINUS} + dV_{NULL}$$

- Die Spannung am MINUS-Eingang des NULL-Detektors ist gleich der für das Bezugsnormal spezifizierten Spannung V_S zuzüglich einer unbekanntem Abweichung dV_{MINUS} , die ihre Ursache in zwei Einflüssen hat. Zum einen wird die aktuelle im Zeitpunkt der Messung bereitgestellte Spannung des Bezugsnormales aufgrund von Alterungen und Langzeitinstabilitäten von der Spannung abweichen, die für das Normal zur Zeit seiner Kalibrierung im Kalibrierschein zertifiziert ist (Drift). Zum anderen treten durch die Zusammenschaltung des Bezugsnormals mit dem NULL-Detektor aufgrund etwaiger Fehlanpassungen Abweichungen auf, indem der Quellwiderstand des Bezugsnormals mit dem Eingangswiderstand des MINUS-Eingangs des NULL-Detektors einen Spannungsteiler bildet

$$(5.2) \quad V_{MINUS} = V_S + dV_{MINUS}$$

- Die Spannung am PLUS-Eingang des NULL-Detektors ist gleich der von der Spannungsquelle abgegebenen Spannung V_X zuzüglich einer möglichen unbekanntem Abweichung dV_{PLUS} . Sie hat ihre Ursache wieder in etwaigen Fehlanpassungen.

$$(5.3) \quad V_{PLUS} = V_X + dV_{PLUS}$$

Setzt man die Gleichungen ineinander ein, so ergibt sich die Wirkung (Anzeige) aus der Ursache (Anlegen der Spannungen der zu vermessenden Spannungsquelle V_X und der Bezugsspannungsquelle V_S) in der Form

$$(5.4) \quad DV_{\text{IND}} = V_X - V_S + dV_{\text{PLUS}} - dV_{\text{MINUS}} + dV_{\text{NULL}}.$$

Diese Ursache-Wirkung-Beziehung beschreibt quantitativ die messtechnischen Zusammenhänge, also die Vorgänge, die zu der Anzeige am NULL-Detektor führen. Dabei sind die Größen V_X und V_S die Größen, die wesentlich den messtechnischen Ablauf des Prozesses und damit die Anzeige DV_{IND} am NULL-Detektor bestimmen. Die Größen dV_{PLUS} , dV_{MINUS} und dV_{NULL} stellen demgegenüber im messtechnischen Sinne Störgrößen dar, und zwar Störgrößen, die unvermeidbar auftreten und Abweichungen vom gewünschten idealen Verhalten beschreiben. Diese Störgrößen können nicht genau angegeben werden. Ihr Wert und ihr Einfluss auf das Messergebnis muss vielmehr aus den Bedingungen der Messung eingeschätzt werden.

Die messtechnische Aufgabe der Auswertung besteht damit darin, aus den Kenntnissen über die Spannung V_S des Bezugsnormals, dem am NULL-Detektor angezeigten Wert ΔV_{IND} und den Kenntnissen über die störenden Einflussgrößen dV_{PLUS} , dV_{MINUS} und dV_{NULL} eine Aussage über den Wert der Messgröße V_X zu gewinnen. Dazu löst man die Gleichung nach der Messgröße, der nicht exakt bekannten Spannung der zu vermessenden Spannungsquelle, auf. Das ergibt das Modell der Auswertung

$$(5.5) \quad V_X = V_S + DV_{\text{IND}} - dV_{\text{PLUS}} + dV_{\text{MINUS}} - dV_{\text{NULL}}$$

Dieses Modell der Auswertung zeigt wie die Messgröße durch die Einflussgrößen auf der rechten Seite bestimmt wird. Es stellt damit die mathematische Beziehung her, wie das Messergebnis, d.h. der Wert, der der Messgröße unter den Bedingungen der Messung zuzuordnen ist, sich aus den Werten der Größen ergibt, die für die Messung relevant sind. Es enthält neben den eigentlichen wertbestimmenden Größen V_S und DV_{IND} auch die durch das Verfahren gegebenen nicht genau bekannten Abweichungen. Es beschreibt bis jetzt nur die messtechnischen Zusammenhänge, wie sie durch das Messverfahren selbst vorgegeben sind, und an welchen Stellen Abweichungen vom idealen Verhalten zu erwarten sind. Es beschreibt jedoch noch nicht die physikalischen Ursachen dieser Abweichungen. Hierzu muss man die Details der einzelnen messtechnischen Blöcke und ihre Verknüpfung näher betrachten.

Die unbekannte Abweichung dV_{NULL} hat mehrere Ursachen

- die nicht-vollkommene Gleichtaktunterdrückung im NULL-Detektor liefert eine mögliche unbekannte Abweichung dV_{GT} ;
- die Nullpunkt-Instabilität des NULL-Detektors liefert eine mögliche unbekannte Abweichung dV_{NP} ;
- mögliche Nicht-Linearitäten der Anzeige des NULL-Detektors liefern eine mögliche unbekannte Abweichung dV_{lin} ;

- die endliche Auflösung der Anzeige des NULL-Detektors liefert eine mögliche unbekannte Abweichung dV_{IND} .

Insgesamt setzt sich somit die unbekannte Abweichung dV_{NULL} in der Form

$$(5.6) \quad dV_{\text{NULL}} = dV_{\text{GT}} + dV_{\text{NP}} + dV_{\text{lin}} + dV_{\text{IND}}$$

zusammen.

Die unbekannte Abweichung dV_{MINUS} hat die Ursachen

- der Bezugsspannung überlagerte Thermospannungen liefern eine mögliche unbekannte Abweichung dV_{MINUSTh} ;
- Einflüsse der Fehlanpassung im Bezugszweig liefern eine mögliche unbekannte Abweichung dV_{MINUSL} ;
- eine nicht genau bekannte Drift des Wertes des Bezugsnormals liefert eine mögliche unbekannte Abweichung dV_{SD}

Insgesamt ergibt sich somit die unbekannte Abweichung dV_{MINUS} in der Form

$$(5.7) \quad dV_{\text{MINUS}} = dV_{\text{MINUSTh}} + dV_{\text{MINUSL}} + dV_{\text{SD}}$$

Die unbekannte Abweichung dV_{PLUS} hat die Ursachen

- der Ausgangsspannung des Spannungsteilers überlagerte Thermospannungen liefern eine mögliche unbekannte Abweichung dV_{PLUSTh} ;
- Einflüsse der Fehlanpassungen im Messzweig zwischen der zu kalibrierenden Spannungsquelle und dem PLUS-Eingang des NULL-Detektors liefern eine mögliche unbekannte Abweichung dV_{PLUSL} .

Insgesamt ergibt sich somit die unbekannte Abweichung dV_{PLUS} in der Form

$$(5.8) \quad dV_{\text{PLUS}} = dV_{\text{PLUSTh}} + dV_{\text{PLUSL}}$$

Durch Einsetzen dieser Gleichungen werden die durch das Messverfahren generierten möglichen unbekanntem Abweichungen auf ihre physikalische Ursache zurückgeführt. Damit ergibt sich das endgültige Modell der Auswertung der Messung

$$(5.9) \quad \begin{aligned} V_x &= V_s + DV_{\text{IND}} + dV_{\text{SD}} \\ &+ dV_{\text{MINUSTh}} + dV_{\text{MINUSL}} - dV_{\text{PLUSTh}} - dV_{\text{PLUSL}} \\ &- dV_{\text{GT}} - dV_{\text{NP}} - dV_{\text{lin}} - dV_{\text{IND}} \end{aligned}$$

6 Bestimmung des Wägewertes eines Gewichtsstückes mit einer Waage

Die Messaufgabe ist in der Überschrift schon eindeutig beschrieben. Die benutzte Messmethode ist die direkte Methode, bei der der angezeigte Wägewert der Wert ist der der Messgröße zugewiesen wird. Das Verfahren besteht in der Bestimmung der Anzeige, die sich bei der Belastung einer Waage mit dem Gewichtsstück, dessen Wägewert bestimmt werden soll, einstellt. Die wesentlichen Aspekte des Messprozesses sind schematisch in Fig. 6.1 dargestellt.

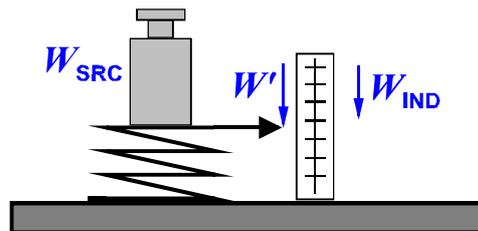


Fig. 6.1. Schematische Darstellung des idealisierten Messprozesses bei der Bestimmung des Wägewertes eines Gewichtsstückes mit einer Waage.

- W_{SRC} - Wägewert des aufgelegten Gewichtsstückes
- W' - zur wirksamen Gewichtskraft proportionale Auslenkung (üblicherweise in Gewichtseinheiten angegeben)
- W_{IND} - Auf der Anzeigeskala ausgewiesener Wägewert

Das auf den Lasträger aufgelegte Gewichtsstück W_{SRC} deformiert das als Kraftaufnehmer wirkende elastische Element und erzeugt die Auslenkung W' , die im allgemeinen innerhalb gewisser Grenzen dem wirksamen Gewicht proportional ist. Da das Gewichtsstück nicht mit Sicherheit exakt (in der Mitte) des Lasträgers aufgesetzt sein wird, oder aus einer Reihe von anderen Gründen, ist das wirksame Gewicht i. Allg. nicht gleich dem aufgelegten Gewicht. Es wird sich vielmehr um eine unbekannte (nicht-vollständig bestimmbare) Abweichung cW_{SRC} vom aufgelegten Gewicht unterscheiden

$$(6.1) \quad W' = T \times (W_{\text{SRC}} + cW_{\text{SRC}}).$$

Durch die Ablesung wird der auftretenden Auslenkung W' die Anzeige W_{IND} zugeordnet, die sich aufgrund der endlichen Auflösung der Anzeige-Skala (Quantisierungsschritt) von der Auslenkung durch eine weitere unbekanntes (wieder nicht-vollständig bestimmbare) Abweichung cW_{IND} unterscheiden wird

$$(6.2) \quad W_{\text{IND}} = W' + cW_{\text{IND}}.$$

Einsetzen der Gleichung Gl(6.1) in die Gleichung Gl(6.2) liefert schließlich die Ursache-Wirkung-Beziehung des vorglegten Messprozesses

$$(6.3) \quad W_{\text{IND}} = T \times W_{\text{SRC}} + cW.$$

mit der unbekanntes (nicht-vollständig bestimmbaren) Gesamtabweichung

$$(6.4) \quad dW = T \times dW_{\text{SRC}} + dW_{\text{IND}}.$$

Sie beschreibt wie das System auf das "Gewicht-Auflegen" als Ursache mit einer "Änderung der Anzeige" als Wirkung antwortet (Response).

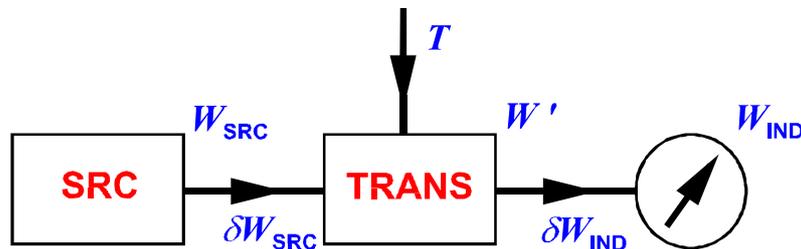


Fig. 6.2. Ursache-Wirkung-Zusammenhang des idealisierten Messprozesses bei der Bestimmung des Wägewertes eines Gewichtsstückes mit einer Waage.

W_{SRC} - Wägewert des aufgelegten Gewichtsstückes,

dW_{SRC} - unbekannte, nicht-vollständig bestimmbare Abweichung des aufgelegten Wägewertes von wirksamen Wägewert,

T - Transmissionsfaktor des Kraftaufnehmers, der das wirksame Gewicht in eine Auslenkung wandelt,

W' - zur wirksamen Gewichtskraft proportionale Auslenkung (üblicherweise in Gewichtseinheiten angegeben),

dW_{IND} - unbekannte, nicht-vollständig bestimmbare Abweichung der Auslenkung von dem auf der Anzeigskala ausgewiesenen Wägewert,

W_{IND} - auf der Anzeigskala ausgewiesener Wägewert

In den Gleichungen Gl(3) und Gl(4) sind mit Ausnahme des Wägewertes W_{SRC} des zu wiegenden Gewichtsstückes alles bekannt oder zumindest mehr oder weniger genau einschätzbar. Dadurch kann aus diesen Kenntnissen eine Aussage über die Messgröße W_{SRC} gemacht werden. Dazu wird die Gleichung Gl(3) nach der Messgröße aufgelöst, so dass sich das Modell der Auswertung

$$(6.5) \quad W_{\text{SRC}} = \frac{W_{\text{IND}} - dW}{T}.$$

ergibt. Daraus ergibt sich nach den Regeln des GUM der Messwert als bester Schätzwert ($dw = 0$)

$$(6.6) \quad w_{\text{SRC}} = \frac{w_{\text{IND}}}{t}.$$

mit der ihm beizuordnenden Standardmessunsicherheit

$$(6.7) \quad \frac{u^2(w_{\text{SRC}})}{w_{\text{SRC}}^2} = \frac{u^2(dw)}{w_{\text{IND}}^2} + \frac{u^2(t)}{t^2}.$$

I.Allg. wird eine Waage vom Hersteller so eingestellt, dass der verursachende Wert innerhalb der angegebenen Fehlergrenzen mit dem angezeigten Wert übereinstimmt. Diese Form der Kenntnisse wird mathematisch beschrieben durch eine rechteckförmige Verteilung der möglichen Werte des Transmissionsfaktors T mit dem besten Schätzwert

$$(6.8) \quad t = 1.$$

Damit ergibt sich der Messwert

$$(6.9) \quad w_{\text{SRC}} = w_{\text{IND}} \cdot$$

mit der beizuordnenden Standardmessunsicherheit

$$(6.10) \quad u^2(w_{\text{SRC}}) = u^2(cw) + w_{\text{IND}}^2 \times u^2(t).$$

7 Aufbau einer Wägewerte-Skala durch Kalibrierung von Ersatzgewichten

Die Messaufgabe besteht in diesem Fall darin, eine Reihe von Ersatzgewichten aufzubauen, die rückgeführte Wägewerte bereitstellen, die diskrete Werte einer Wägewerte-Skala verkörpern. Der Aufbau läuft so ab, dass ausgehend von dem vorhandenen Normalgewicht in der ersten Stufe ein Ersatzgewichtsstück hergestellt wird, dessen Wägewert (messtechnisch) gleich den Wägewert des Normalgewichtes ist. Der hierfür notwendige Messprozess läuft in zwei Schritten ab:

- im ersten Schritt wird der Wägewert des Normalgewichtes auf die Anzeige der Waage übertragen und
- im zweiten Schritt wird das Ersatzgewicht so eingestellt (justiert), dass es auf der Waage die gleiche Anzeige liefert, wie zuvor das Normalgewicht.

Damit steht neben dem Normalgewicht ein kalibriertes Gewichtsstück, d.h. ein Ersatzgewicht, zur Verfügung, das den gleichen Wägewert wie das Normalgewicht besitzt. In den nachfolgenden Stufen wird jedesmal ein Ersatzgewicht hergestellt, dessen Wägewert gleich der Summe der Wägewerte des Ersatzgewichtes der vorhergehenden Stufe und des Normalgewichtes ist. Auf diese Weise wird sukzessive eine Wägewerte-Skala aufgebaut, die den Vielfachen des Wägewertes des vorhandenen Normalgewichtes entspricht.

Die Unsicherheitsanalyse beginnt mit der Aufstellung der Ursache-Wirkung-Beziehung des einzelnen Messschrittes einer Kalibrier-Stufe.

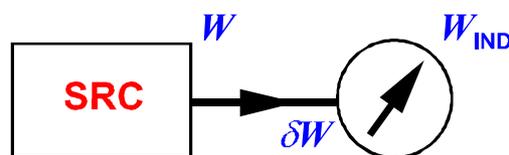


Fig. 7.1. Ursache-Wirkung-Zusammenhang eines Schrittes bei der Kalibrierung eines Ersatzgewichtes mit einer Waage.

W - Wägewert des aufgelegten Gewichtsstückes,

- dW - unbekannte, nicht-vollständig bestimmbare Abweichung des angezeigten Wägewertes vom Wägewert des aufgelegten Gewichtsstückes,
 W_{IND} - auf der Anzeige-Skala ausgewiesener Wägewert.

Fig. 3 zeigt den Zusammenhang zwischen dem angezeigten Wert und dem angebotenen Wert

$$(2.1) \quad W_{\text{IND}} = W + dW$$

Diese Gleichung wird bei der Herstellung eines Ersatzgewichts 2-mal angewandt

- im ersten Schritt bei der Übertragung des Normalgewichtes W_S auf die Anzeigeskala

$$(7.2) \quad W_{\text{IND S}} = W_S + dW_S$$

- im zweiten Schritt bei der Übertragung des Wertes der Anzeige-Skala auf das Ersatzgewichtes W_E

$$(7.3) \quad W_{\text{IND E}} = W_E + dW_E$$

Der Messprozess wird nun durch Justierung des Ersatzgewichtes so geführt, dass sich für das Ersatzgewicht die gleiche Anzeige einstellt wie für das Normalgewicht:

$$(7.4) \quad W_{\text{IND E}} = W_{\text{IND S}}$$

Den Ursache-Wirkung-Zusammenhang für den gesamten Kalibrierprozess einer Stufe zeigt Fig. 4.

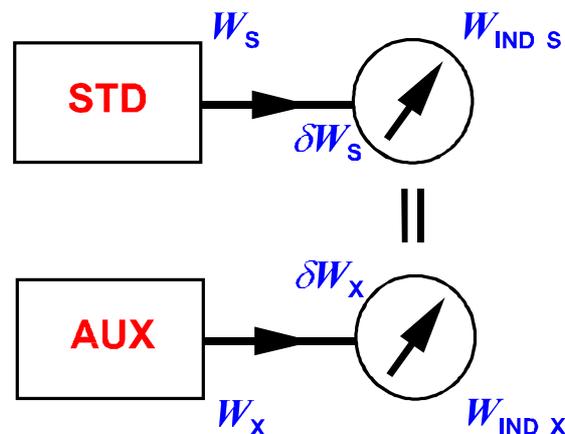


Fig. 7.2. Ursache-Wirkung-Zusammenhang der Kalibrierung eines Ersatzgewichtes einer Stufe mit einer Waage.

- W_S - Wägewert des aufgelegten Normalgewichtes,
- W_{IND} - unbekannte, nicht-vollständig bestimmbare Abweichung des angezeigten Wägewertes vom Wägewert des aufgelegten Normalgewichtes, bei der Übertragung des Wertes auf die Anzeige
- $W_{\text{IND S}}$ - auf der Anzeigeskala ausgewiesener Wägewert bei der Übertragung,
- W_X - Wägewert des aufgelegten Ersatzgewichtes,

- dW_x - unbekannte, nicht-vollständig bestimmbare Abweichung des angezeigten Wägewertes vom Wägewert des aufgelegten Ersatzgewichts, bei der Übertragung des Wertes auf die Anzeige
- $W_{\text{IND } x}$ - auf der Anzeigeskala ausgewiesener Wägewert bei der Übertragung.

Sie repräsentiert wieder eine NULL-Methode, nur dass jetzt kein Gerät als NULL-Detektor eingesetzt wird. Vielmehr wird die NULL-Detektion jetzt vom Beobachter selbst vorgenommen.

Damit ergibt sich das Modell der Auswertung für die Kalibrierung des Ersatzgewichtes

$$(7.5) \quad W_x = W_s + dW_s - dW_x$$

d.h. wieder eine Gleichung der Form von Gl.(7.1),

$$(7.6) \quad W_x = W_s + dW_{xs}$$

wobei sich die unbekannte, nicht-vollständig bestimmbare Abweichung aufgrund der Bedingungen des Kalibrierprozesses aus den entsprechenden unbekanntenen Abweichungen der beiden Vergleichsschritte zusammensetzt.

$$(7.7) \quad dW_{xs} = dW_s - dW_x$$

Der Aufbau der Wägewerte-Skala läuft nun so ab, dass nach dem gerade beschriebenen Verfahren sukzessiv (kalibrierte) Ersatzgewichte für die einzelnen Stufen hergestellt werden, deren Wägewert der Summe aus dem Wägewerten des zuvor kalibrierten Ersatzgewicht und dem Normalgewicht entspricht. Dazu werden zunächst in jeder Stufe zunächst die das gerade kalibrierte Ersatzgewicht zusammen mit dem Normalgewicht auf den Lastträger auf die Anzeige übertragen, die jetzt der Summe der beiden Gewichtstücke entspricht. Danach wird ein Ersatzgewicht so justiert, dass wieder dieser Wert angezeigt wird, wenn aus auf den Lastträger aufgebracht wird. Damit nimmt das Modell der Auswertung für die i -te Kalibrierstufe die Form

$$(7.8) \quad W_{x_i} = W_s + W_{x_{i-1}} + dW_{xs_i}$$

- W_{x_i} - Wägewert des Ersatzgewichts der Stufe i
- $W_{x_{i-1}}$ - Wägewert des Ersatzgewichts der Stufe $i-1$
- dW_{xs_i} - unbekannte, nicht-vollständig bestimmbare Abweichung aufgrund der Bedingungen des Messprozesse während der Kalibrierung auf der Stufe i

Das ist eine Gleichung, durch die die Wägewerte der Ersatzgewichte der einzelnen Stufen rekursiv aufeinander zurückgeführt werden. Führt man die rekursive Ersetzung durch, erhält man das Modell der Auswertung für das Ersatzgewicht der n -ten Stufe in der Form

$$(7.9) \quad W_{E_n} = n \times W_s + \sum_{i=1}^n dW_{ES_i}$$

Hierin sind die Eingangsgrößen, das Normalgewicht und die unbekannt, nicht-vollständig bestimmbar Abweichungen aufgrund der Bedingungen des Messprozesse während der Kalibrierung auf den einzelnen Stufen, als unkorreliert zu betrachten, da die Kenntnisse aus Messungen auf den verschiedenen Stufen stammen, die als unabhängig voneinander zu betrachten sind.

Die Auswertung ergibt

- den Messwert, d.h. den Wägewert des Ersatzgewichtes, zu

$$(7.10) \quad w_{E_n} = n \times w_s$$

- und die Standardmessunsicherheit.

$$(7.11) \quad u^2(w_{E_n}) = n^2 \times u^2(w_s) + \sum_{i=1}^n u^2(dw_{ES_i}),$$

die dem Messwert beizuordnen ist.

Sind die Bedingungen der Kalibrierung (des Vergleichs) auf allen Stufen gleich, kann also der hieraus resultierende Unsicherheitsbeitrag als gleich angesehen werden

$$(7.12) \quad u(dw_{ES_1}) = u(dw_{ES_2}) = \dots = u(dw_{ES_n}) = u(dw_{ES})$$

so ergibt sich abschließend

$$(7.13) \quad u^2(w_{E_n}) = n^2 \times u^2(w_s) + n \times u^2(dw_{ES})$$

Im konkreten Einzelfall muss die Standardmessunsicherheit $u(dw_{ES})$ herrührend von dem Messprozess der einzelnen Kalibrierstufen entsprechend den auf jeder Kalibrierstufe durchgeführten Einzelmessungen und den dabei wirksamen Einflussgrößen weiter aufgespalten werden. Hierbei können die Beiträge zwischen den beiden Einzelschritten als unabhängig angesehen werden, da es sich um zwei verschiedene Messungen handelt. Für die diversen Beiträge einer Einzelmessung gilt das entsprechend der Maßgabe der Kenntnisse über die jeweilige Einzelmessung.

9 Danksagung

Ich danke meinen Kollegen in der PTB, die nicht müde wurden, meine bohrenden Fragen zu ihren Messprozessen zu beantworten. Mein Dank gilt auch den Mitgliedern des MU-L (Messunsicherheits-Lenkungsgremium der PTB), die durch die Diskussion einer großen Zahl von Beispielen mir dazu halfen, meine Sicht zu Problemen der Messunsicherheit zu vereinfachen und damit transparenter zu gestalten. Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. Hans Bachmair, Leiter der Abteilung "Elektrizität" der PTB, der meine Aufmerksamkeit auf die Beschreibung von Messprozessen mit Blockdiagrammen lenkte. Mein besonderer Dank gilt schließlich den europäischen Kollegen der EA-Task Force für Messunsicherheit und Herrn Dr. Wolfgang Wöger (PTB) für die vielen anregenden Diskussionen, die dazu beitrugen, zu verstehen, was das GUM wirklich bedeutet.

8 Literaturnachweis

- [1] GUM, "Guide to the expression of uncertainty in measurement", first edition, 1993, corrected and reprinted 1995, International Organisation for Standardization (Geneva, Switzerland), dtsh.: "Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen", 1. Auflage 1995, Deutsches Institut für Normung - Beuth-Verlag.
- [2] Informationen zur EA und die von ihr herausgegebenen Dokumente sind im Internet erhältlich unter <http://www.european-accreditation.org>.
- [3] EA-4/02(EAL-R2) "Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration", requirements document, first edition 1996, European co-operation for Accreditation (Utrecht, The Netherlands)
dtsh.: DKD-3 "Angabe der Messunsicherheit beim Kalibrieren",
Ausgabe 1998, hrsg. PTB - Wirtschaftsverlag NW.
- [4] EA-4/02-S1(EAL-R2-S1) "Supplement 1 to EA-4/02 Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration - Examples", guidance document,
first edition 1997, European co-operation for Accreditation (Utrecht, The Netherlands)
dtsh.: DKD-3-E1 "Angabe der Messunsicherheit beim Kalibrieren, Beispiele",
Ausgabe 1998, hrsg. PTB - Wirtschaftsverlag NW.
- [5] EA-4/02-S2(EAL-R2-S2) "Supplement 2 to EA-4/02 Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration - additional Examples", guidance document,
first edition 1999, European co-operation for Accreditation (Utrecht, The Netherlands)
dtsh.: DKD-3-E2 "Angabe der Messunsicherheit beim Kalibrieren, Zusätzliche Beispiele"
Ausgabe Frühjahr 2000, Hrsg. PTB - Wirtschaftsverlag NW.
- [6] Auf dem 139. PTB-Seminar "Aktuelle Problem der Weitergabe von HF-Messgrößen" (Mai 1998) wurde ein Computer-Programm-Paket mit dem Namen 'GUM Workbench' vorgestellt worden, das den Anwender durch die Bestimmung des vollständigen Messergebnisses nach den Verfahren des GUM bzw. der EA-4/02(EAL-R2)/DKD-3 führt. Es liefert nach den dort niedergelegten und in diesem Beitrag dargestellten Regeln ein gedrucktes Protokoll, das den Forderungen an die Dokumentation in der Qualitätssicherung entspricht. Interessenten erhalten nähere Informationen und auch Demo-Versionen vom Entwickler unter <http://www.metrodata.de> oder vom Europäischen Distributor (DTI - Dansk Teknologisk Institut) unter <http://www.gum.dk>.
- [7] VIM, "International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology", second edition, 1993, International Organisation for Standardization (Geneva, Switzerland), dtsh.: "Internationales Wörterbuch der Metrologie",
2. Auflage 1994, Deutsches Institut für Normung - Beuth-Verlag.
- [8] DIN 1319 "Grundlagen der Messtechnik"
Teil 1: "Grundbegriffe" (1995)
Teil 2: "Begriffe für die Anwendung von Messgeräten" (in Überarbeitung)
Teil 3: "Auswertung von Messungen einer einzelnen Messgröße, Messunsicherheit" (1996)

Teil 4: "Auswertung von Messungen, Messunsicherheit" (1999)
Deutsches Institut für Normung - Beuth-Verlag.

- [9] W.Kessel, "Messunsicherheitsanalyse für die Kalibrierung von Wechselspannungsmessgeräten mit Thermokonverten", in "Vorträge des 147. PTB-Seminars - Einsatz komplexer elektronischer Präzisionsmessgeräte in Kalibrierlaboratorien", hrsg. H. Bachmair und M. Klonz, PTB-Bericht PTB-E-64, Braunschweig 1999, PTB - Wirtschaftsverlag NW.

Adresse des Autors

Dr.rer.nat. Wolfgang Kessel, Physikalisch-Technische Bundesanstalt,
Proj. 2.002 "Messunsicherheit im industriellen und gesetzlichen Messwesen",
Bundesallee 100, D-38 116 BRAUNSCHWEIG
Tel.: +49 531 592 2131
FAX: +49 531 592 2130
email: wolfgang.kessel@ptb.de